LA DERIVATION

A) Dérivation en un point et Dérivé à droite et dérivé à gauche.

1) f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre $\boldsymbol{a}$.

f est dérivable en a si la limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie le note $f'(a)$:Le nombre dérivé de la fonction f en a

2) f est dérivable en a ssi $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ Finie

3)Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$ où $r>0$

f est dérivable à droite de a si la limite $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie : $f'_d(a)$

2) f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r, a]$ où $r>0$

f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie : $f'_g(a)$

3)f est dérivable en a ssi elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a)=f'_g(a)$

4) Toute fonction dérivable en a est continue en a.

B) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) si f est dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme : $u(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

2)Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative C_f admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :$(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$

3) Si f est dérivable à droite de a, alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a :

$(T_d): y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$:$\boldsymbol{x\geq a}$

4) Si f est dérivable à gauche de a, alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a :

$(T_g): y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$: $\boldsymbol{x\leq a}$

5) Si f est dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a)\neq f'_g(a)$ on dit que **l**a courbe représente un point anguleux en $A\,(a, f\,(a))$

C) Dérivabilité sur un intervalle.

1) f est dérivable sur l'ouvert$]a, b[$si elle est dérivable en tout point de $]a, b[$

2) f est dérivable sur le semi-ouvert $[a, b[$si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a

3 f est dérivable sur le fermé $[a, b]$ si elle est dérivable sur$]a, b[$ et dérivable à droite de a et à gauche de b

Remarque :La fonction $artan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

D)Monotonie et extremums d'une fonction : concavité ; points d'inflexions

1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et et $a\in I$

Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a)=0$

2) Si f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors sa courbe représentative admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

3) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

4)a) f' est positive sur I ssi f est croissante sur I.

b) f' est négative sur I ssi f est décroissante

c) f' est nulle sur I ssi f est constante sur I.

5)Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement croissante sur I

6)Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement négatif sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement décroissante sur I

7) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$.

Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a

8) f est deux fois dérivable sur un intervalle$I$.

a) Si f''est positive sur I alors C_f est convexe sur I.

b) Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I.

c) Si f'' s'annule en $\boldsymbol{a}$ en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

1)Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur$]a, b[$ et telle que : $f(a)=f(b)$. Alors il existe un réel $c\in\,]a, b[$ tel que : $f'(c)=0$.

2) Théorème des accroissements finiesT.A.F :

a) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$Alors il existe un réel $c\in]a, b[$tel que :

$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

b) Inégalité des accroissements finies I.A.F :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur$]a, b[$

S'ils existent deux réels M et m tels que :

$m\leq f'(x)\leq M\quad\forall x\in\,]a;b[$

Alors : $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$

3) Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si f est dérivable sur $\boldsymbol{I}$

et $(\forall x\in I)(|f'(x)|\leq k$ (où $k\in\mathbb{R}^*{}_+$)

Alors :$(\forall(x, y)\in I^2)(|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|)$